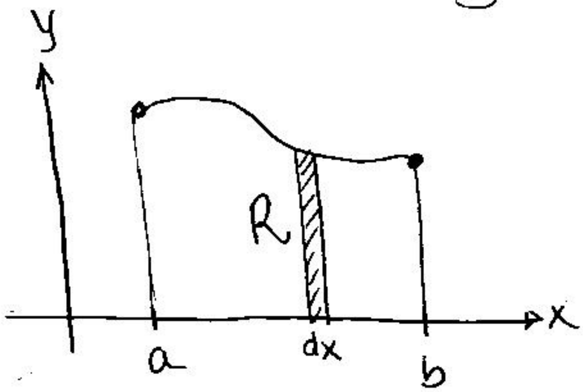
CALCULO DE AREAS PLANAS

- Sea R la región limitada superiormente por la gráfica de la función f, inferiormente por el eje X y lateralmente por las rectas verticales $X=a$ y $x=b$, como se indica en la Figura

CASO 1:



f es una función continua en $[a,b]$

$$dA=(Y_S-Y_I)dX$$

Y_S: Ordenada Y superior

Y_I: Ordenada Y inferior

$$dA=[f(x)-0]dX$$

El área de R viene dada por:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

NOTA: (Los rectángulos son verticales)

- Si $f(x)\leq 0$ para toda x en $[a,b]$, entonces el área de la región R viene dada por:

$$A=\int_a^b [0-f(x)]dX=-\int_a^b f(x)\,dX$$

En este caso:

$Y_S=0$ (Eje x)

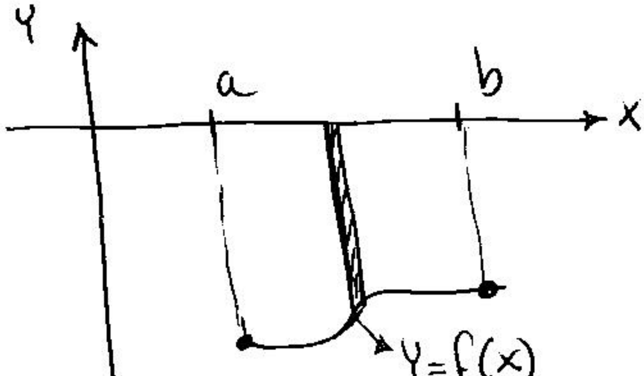
$Y_I=f(x)$

$$dA=(Y_S-Y_I)dx$$

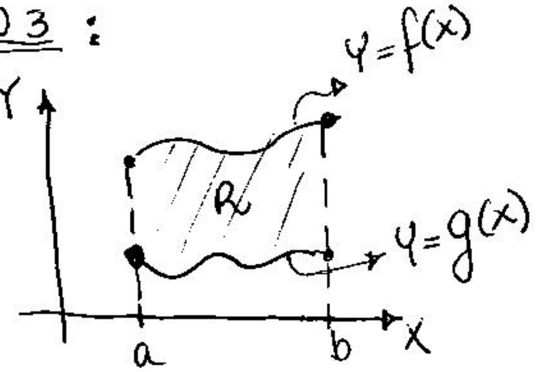
$$dA=[0-f(x)]dx$$

$$A=-\int_a^b f(x)\,dX$$

CASO 2:



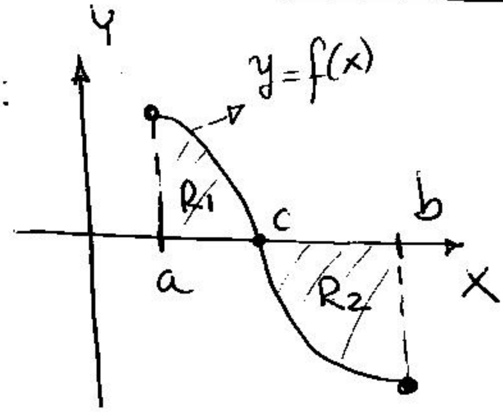
CASO 3 :



$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

Observar que $f(x)$ siempre está por encima de $g(x)$ para toda x en $[a,b]$

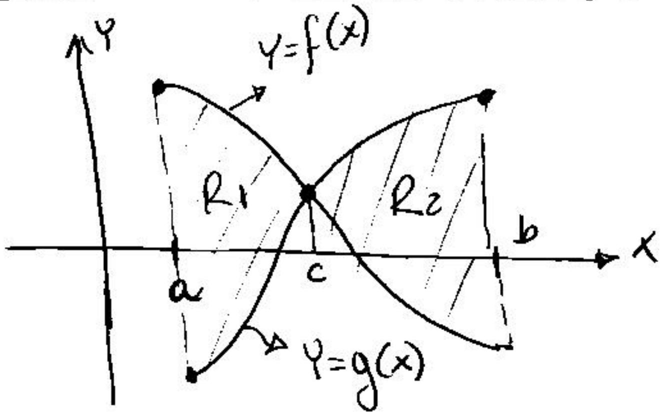
CASO 4 :



En este caso $f(x)$ corta al eje X en un punto $c\in(a,b)$, por lo tanto, la región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2. $R=R_1+R_2$

$$A=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b [0-f(x)]\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx$$

CASO 5 :



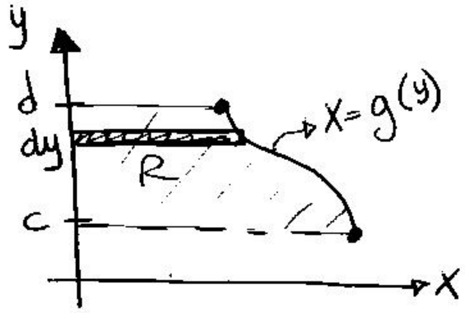
En este caso, las gráficas de f y g se cortan en un punto $c\in(a,b)$. De nuevo la región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2 y el área de R viene dada por:

$$A=\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]\,dx$$

Donde f y g son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$

Ahora consideremos que la región R está determinada de la siguiente manera:

CASO 1:

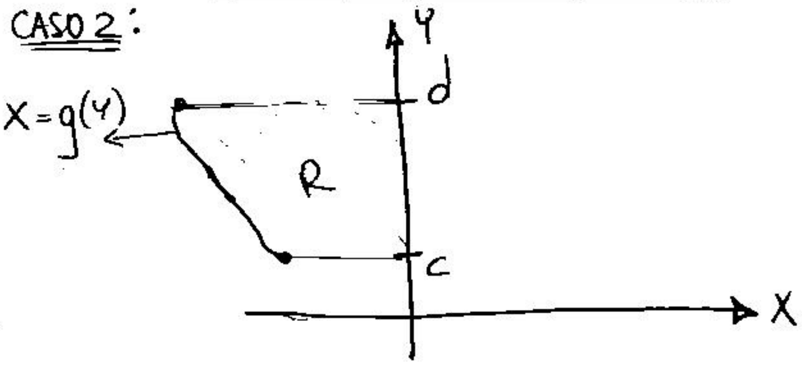


Para hallar el área de la región indicada, se consideran rectángulos horizontales. De esta manera, el diferencial de área de cada rectángulo vendrá dada por:

$$dA=(X_D-X_I)dy$$; X_D: Abscisa de la Derecha
X_I: Abscisa de la izquierda

Por lo tanto; $$A=\int_c^d [X_D-X_I]dy=\int_c^d[g(y)-0]dy=\int_c^d g(y)dy$$

CASO 2:

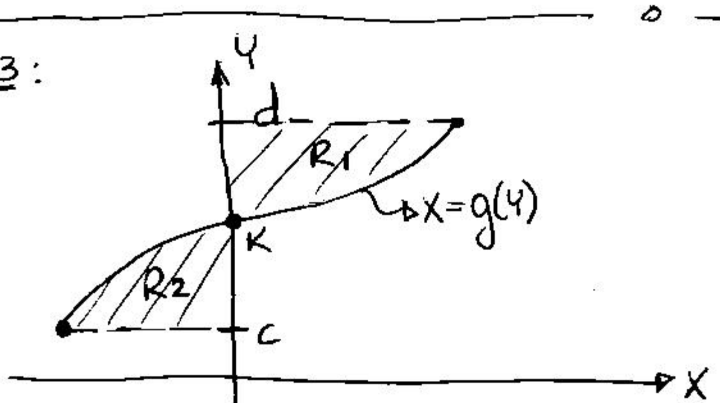


En este caso, el área de la región R viene dada por:

$$A=\int_c^d[X_D-X_I]dy=\int_c^d[0-g(y)]dy$$

$$A=-\int_c^d g(y)dy$$

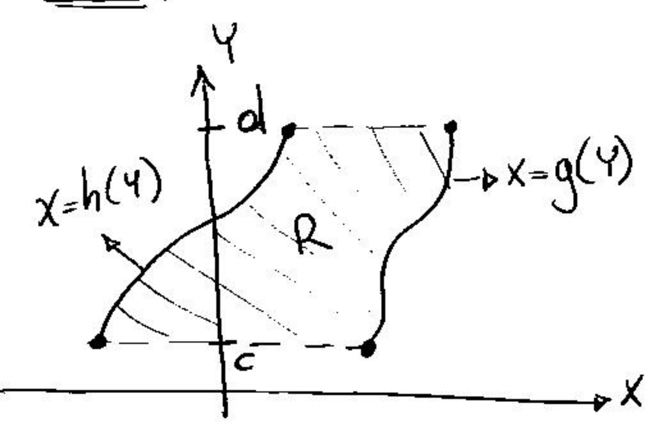
CASO 3:



En este caso, $g(y)$ corta al eje Y en un punto $K\in(c,d)$. Por lo tanto, la región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2, donde $R=R_1+R_2$

$$A=\int_c^K[0-g(y)]dy+\int_K^d[g(y)-0]dy=-\int_c^K g(y)dy+\int_K^d g(y)dy$$

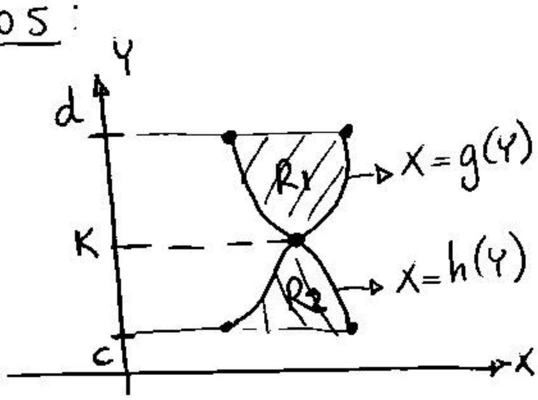
CASO 4 :



En este caso, para toda Y en $[c,d]$, $g(y)$ siempre está a la derecha de $h(Y)$. Por lo tanto, el área de R viene dada por:

$$A=\int_{c}^{d}[g(Y)-h(Y)]dy$$

CASO 5 :



En este caso, $g(Y)$ y $h(Y)$ se cortan en un punto $K \in (c,d)$. Por lo tanto, la región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2. El área de R viene dada por:

$$A=\int_{c}^{K}[h(Y)-g(y)]dy+\int_{K}^{d}[g(Y)-h(Y)]dy$$

• Ejemplo: Calcular el área de la región limitada por las curvas

$4Y^2-2X=0$ y $4Y^2+4X-12=\emptyset$

$y^2=\frac{x}{2}$ (1) ; $4y^2=-4X+12$

$4Y^2=-4(X-3)$

$Y^2=-(X-3)$ (2)

Antes de graficar, calcularemos el punto de corte:

Igualamos (1) y (2):

$\frac{X}{2}=3-X$

$X=6-2X$

$3X=6$

$X=2$

Si $X=2$ entonces $Y^2=1 \rightarrow Y=\pm 1$

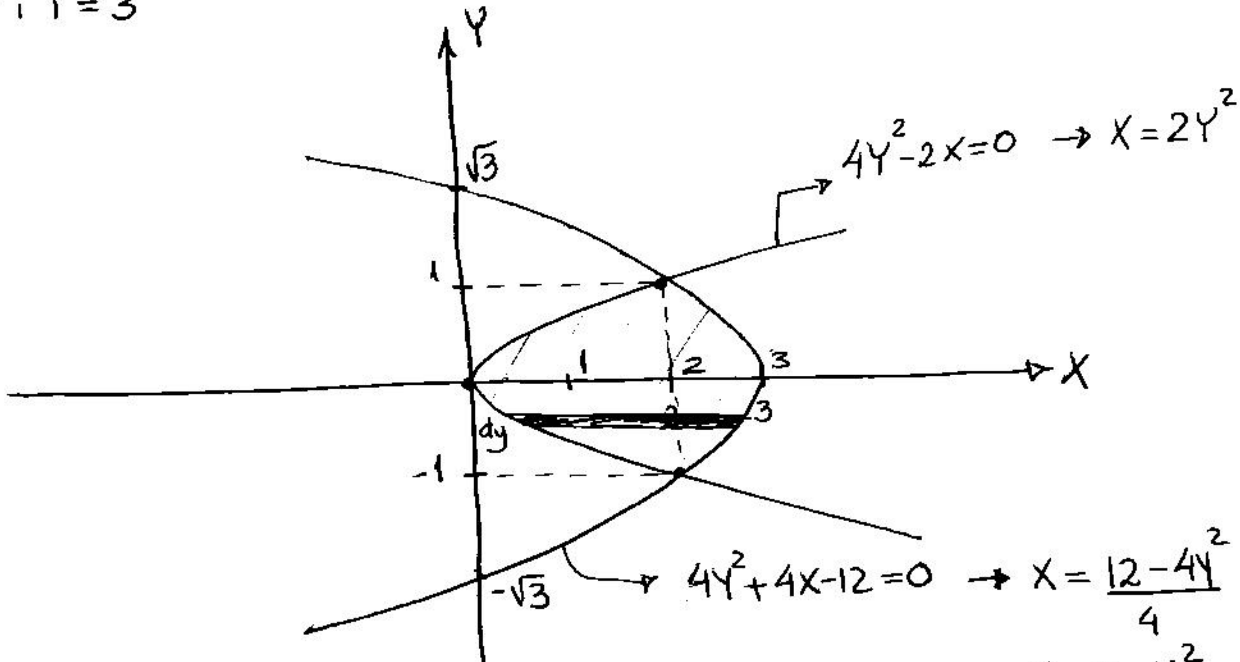
Por lo tanto, los puntos de corte son: $P_1(2,1)$; $P_2(2,-1)$

- $y^2 = \frac{x}{2}$ → Corresponde a una parábola con vértice $V(0,0)$ que abre en "X" hacia la derecha.

- $y^2 = -(x-3)$ → Corresponde a una parábola con vértice $V(3,0)$ que abre en "X" hacia la izquierda.

si $X=0$; $Y^2=3$

$Y = \pm\sqrt{3}$



<u>NOTA</u>: Si utilizamos rectángulos horizontales, podemos hallar el área de la región a través de una sola integral; mientras que si utilizamos rectángulos verticales, se deben resolver dos integrales para calcular el área de la región.

Se calculará el área de la región por medio de rectángulos horizontales y se planteará el caso para rectángulos verticales.

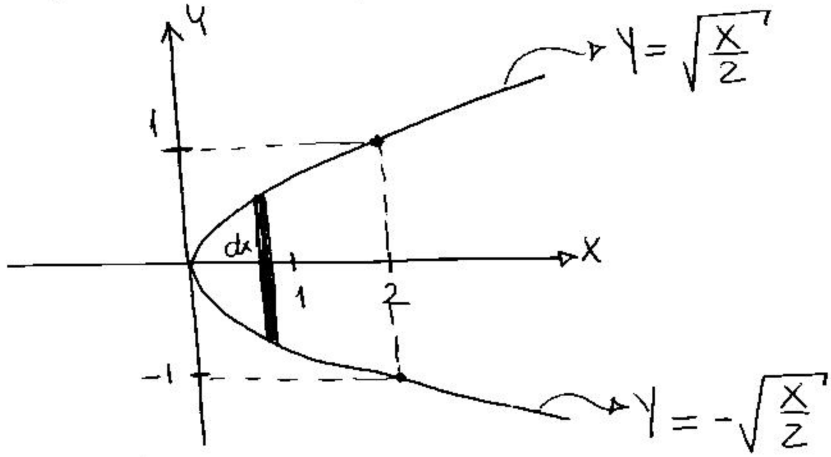
$$A=\int_{-1}^{1}[X_D-X_I]\,dy=\int_{-1}^{1}\left[(3-Y^2)-(2Y^2)\right]dy=3\int_{-1}^{1}(1-Y^2)\,dy=2.3\int_{0}^{1}(1-Y^2)\,dy$$

$$A=6\left[Y-\frac{Y^3}{3}\right]_0^1=4$$

Por rectángulos verticales:

$$A = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x}\, dx + \int_2^3 2\sqrt{3-x}\, dx$$

Explicación: Gráfica de $4y^2 - 2x = 0 \rightarrow y^2 = \frac{x}{2} \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$



$dA = (y_S - y_I)dx$

$y_S = \sqrt{\frac{x}{2}}$

$y_I = -\sqrt{\frac{x}{2}}$

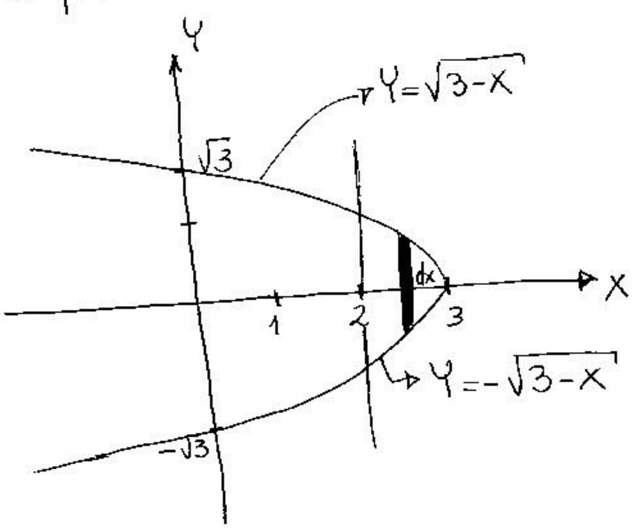
$y_S - y_I = \sqrt{\frac{x}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)$

$= 2\sqrt{\frac{x}{2}} = 2\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x}\, dx$$

Gráfica de $4y^2 + 4x - 12 = 0 \rightarrow y = \pm\sqrt{3-x}$

$dA = (y_S - y_I)dx$



$y_S = \sqrt{3-x}$

$y_I = -\sqrt{3-x}$

$y_S - y_I = \sqrt{3-x} - \left(-\sqrt{3-x}\right)$

$y_S - y_I = \sqrt{3-x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3-x}$

$$A_2 = \int_2^3 2\sqrt{3-x}\, dx$$